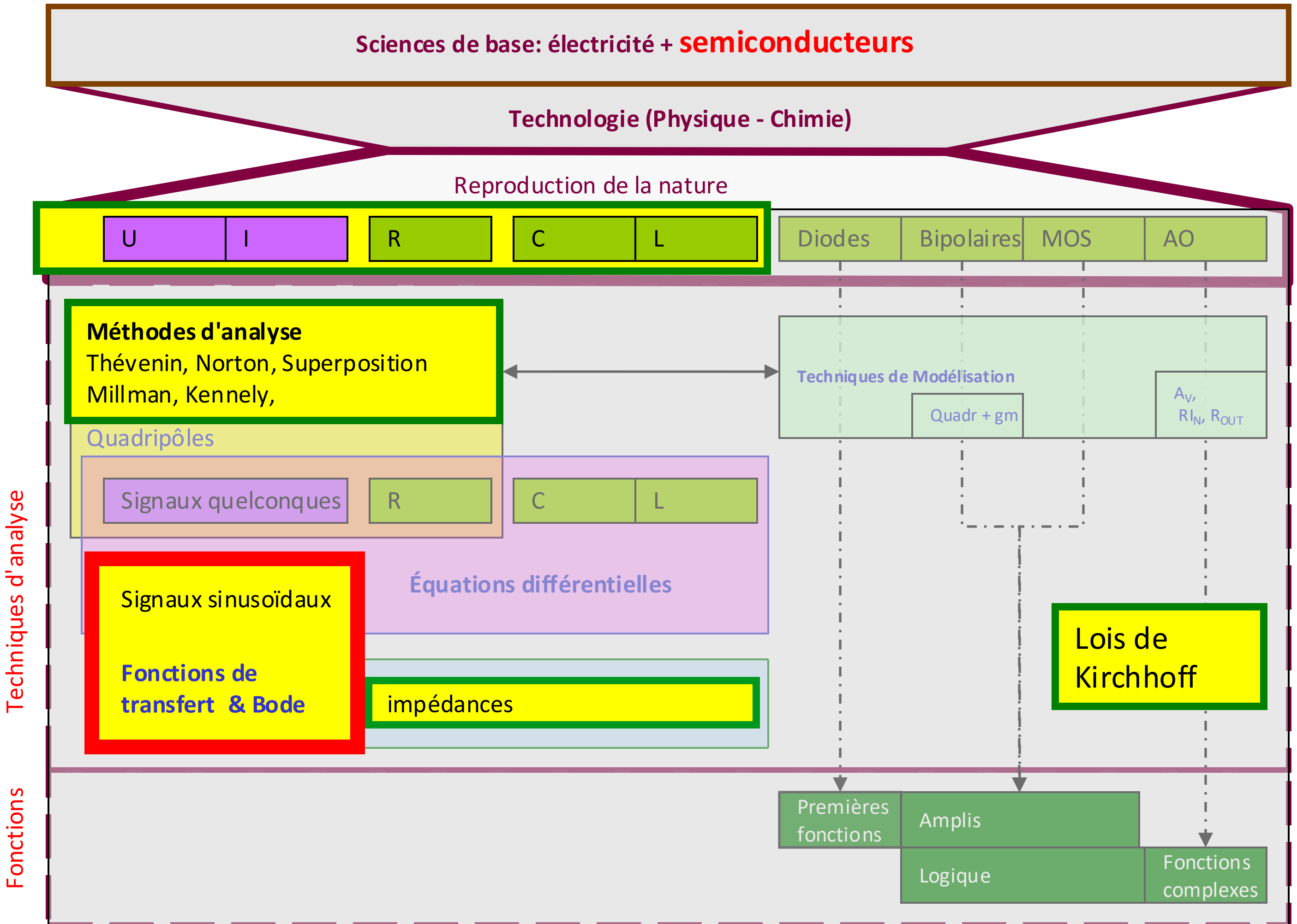
Relations entre les différentes notions



Objectifs de la séance

Rappel : différence essentielle entre diviseur de tension résistif et fonction de transfert

Écriture des fonctions de transfert avec combinaison de termes du premier ordre (Forme canonique)

- **Cinq termes du premier ordre**

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = K.\frac{j\dfrac{\omega}{\omega_{Z1}}.\left(1+j\dfrac{\omega}{\omega_{Z2}}\right).\left(1+j\dfrac{\omega}{\omega_{Z3}}\right)\dots\left(1+j\dfrac{\omega}{\omega_{Zk}}\right)}{j\dfrac{\omega}{\omega_{P1}}.\left(1+j\dfrac{\omega}{\omega_{P2}}\right).\left(1+j\dfrac{\omega}{\omega_{P3}}\right)\dots\left(1+j\dfrac{\omega}{\omega_{Pl}}\right)}}$$

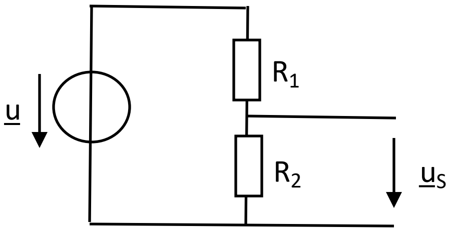
notation libre, mais doit permettre de différencier les pulsations

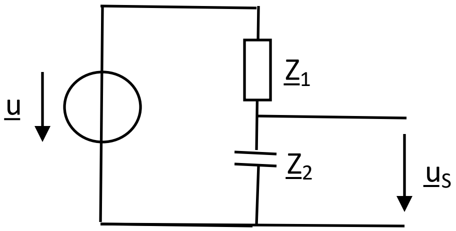
- **K** est une constante, $\boldsymbol{\omega_{zi}}$ (i=1,k) *zéro*, $\boldsymbol{\omega_{pi}}$ (i=1,l) *pôle*

Dessiner le module et l'argument de la fonction de transfert :

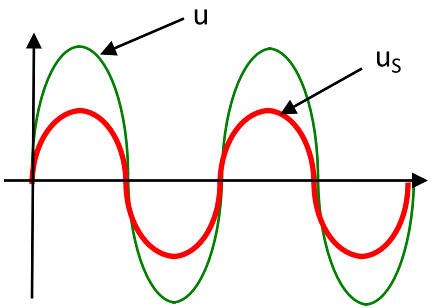
- Le dessin du module $|\underline{H}(j\omega)|$ exprimé en **dB** (décibels) : **échelle linéaire.**
- Le dessin de l'argument $Arg(\underline{H}(j\omega))$ exprimé en **radians** ou **degrés** : **échelle linéaire**
- Dans les deux cas, l'axe des pulsations est représenté sur une **échelle logarithmique.**

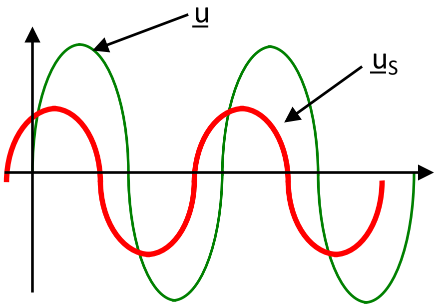
Rappel différence essentielle entre R et $\underline{Z}$





$$\frac{u_s}{u} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$





$$\frac{\underline{u_s}}{\underline{u}} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

Le rapport est une **valeur**

Le rapport est une fonction notée $\underline{H}(j\omega)$
$\underline{H}(j\omega)$ est appelé **fonction de transfert**

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

Module

Argument

Conséquence pour représenter des produits de termes de base

1. Les fonctions de transfert s'expriment à partir d'un produit de termes de bases
2. Exploitation d'une échelle logarithmique pour l'axe des **modules** : Log(A.B) = Log (A) + Log (B)
   - Si A et B sont complexes : |A.B| = |A|.|B| et Log(|A.B|) = Log |A| + Log |B|
3. Quels sont les termes de bases du premier ordre et pourquoi les modules calculés en **dB**?

$$|K|_{dB} = 20.\log(K)$$

$$\left|j\frac{\omega}{\omega_{Z1}}\right|_{dB} = 20.\,log\left|j\frac{\omega}{\omega_{Z1}}\right| = 20.\,log\left(\frac{\omega}{\omega_{Z1}}\right)$$

$$\left|1+j\frac{\omega}{\omega_{Z2}}\right|_{dB} = 20.\,log\left|1+j\frac{\omega}{\omega_{Z2}}\right| = 20.\,log\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_{Z2}}\right)^2}$$

$$\frac{1}{\left|j\frac{\omega}{\omega_{P1}}\right|_{dB}} = 20.\,log\frac{1}{\left|j\frac{\omega}{\omega_{P1}}\right|} = 20.\,log\frac{1}{\left(\frac{\omega}{\omega_{P1}}\right)} = -20.\,log\left(\frac{\omega}{\omega_{P1}}\right)$$

$$\frac{1}{\left|1+j\frac{\omega}{\omega_{P2}}\right|_{dB}} = 20.\,log\frac{1}{\left|1+j\frac{\omega}{\omega_{P2}}\right|} = 20.\,log\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_{p2}}\right)^2}} = -20.\,log\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_{p2}}\right)^2}$$

dB?

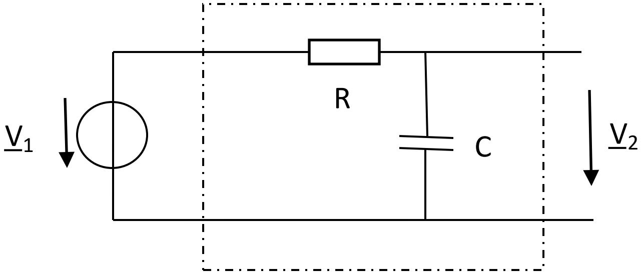
$$\left|\frac{P_2}{P_1}\right|_{dB} = 10.\,log\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$$

$$10.\,log\left(\frac{\frac{U_2^2}{R}}{\frac{U_1^2}{R}}\right) = 10.\,log\left(\frac{U_2^2}{U_1^2}\right) = 10.\,log\left(\frac{U_2}{U_1}\right)^2$$

$$\left|\frac{U_2}{U_1}\right|_{dB} = \mathbf{20}.\,log\left(\frac{U_2}{U_1}\right)$$

log en base 10

L'exemple le plus simple:
Réponse en fréquence du circuit "passe-bas"



$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{V_2}}{\underline{V_1}} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

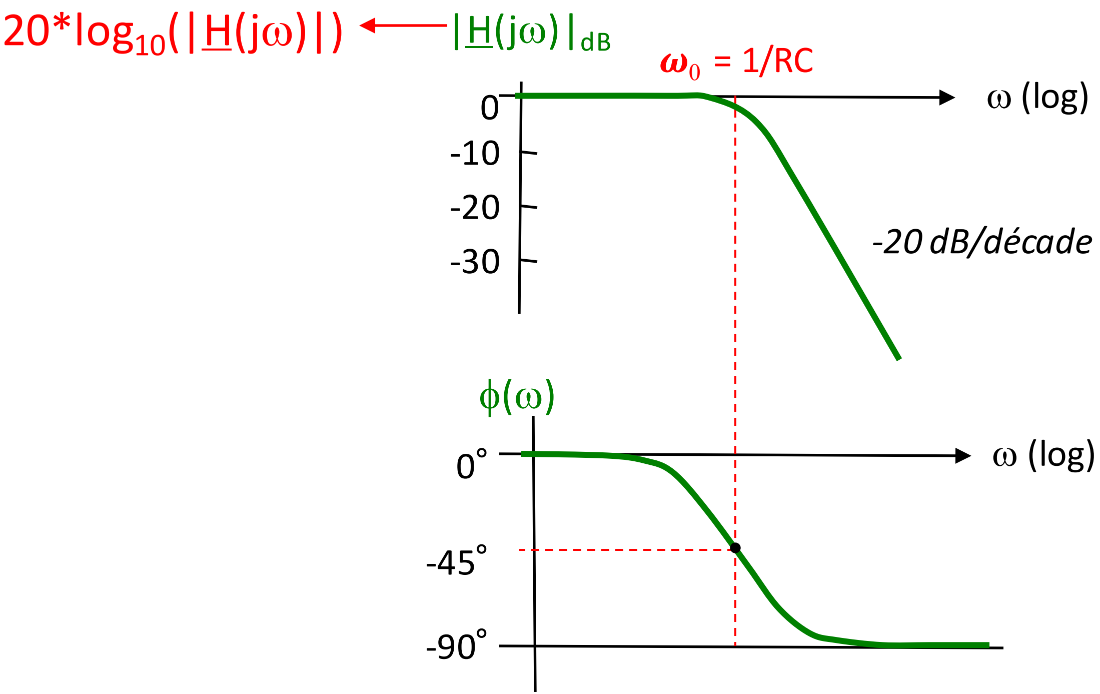
Avec $\omega_0 = 1/RC = 1/\tau$

Module : $\boxed{\left|\underline{H}(j\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}}$

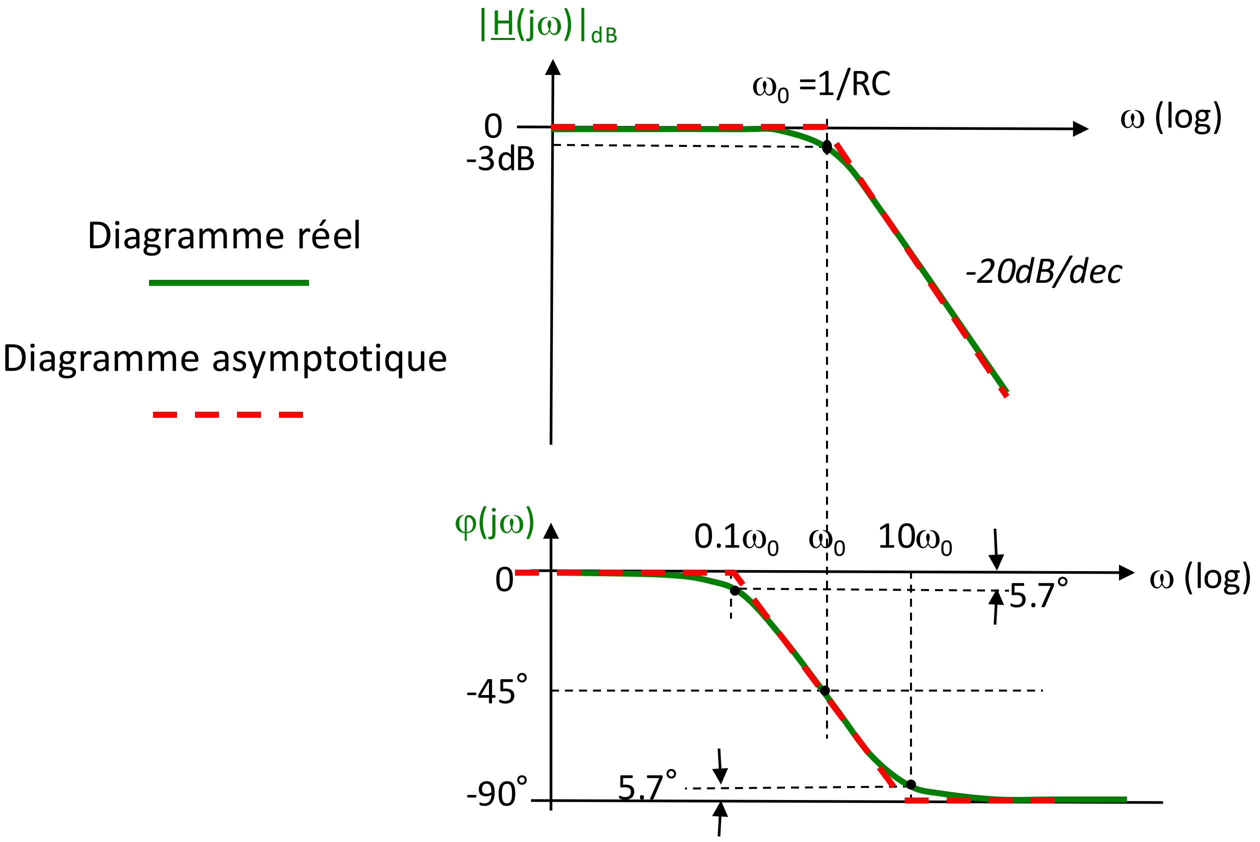
Argument: $\boxed{\mathrm{Arg}\left(\underline{H}(j\omega)\right) = -arctg\,\frac{\omega}{\omega_0}}$

Réponse en fréquence du filtre passe-bas

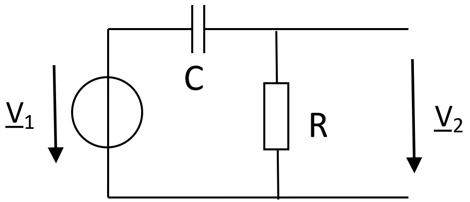
Recherche des asymptotes et cas particulier



Approximation asymptotique



Circuit RC passe-haut



$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{V}_2}{\underline{V}_1} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} = \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

Module : $\boxed{\left|\underline{H}(j\omega)\right| = \frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}}$

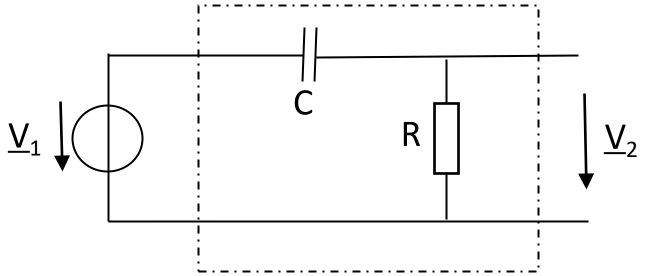
Argument: $\boxed{\mathrm{Arg}\left(\underline{H}(j\omega)\right) = \frac{\pi}{2} - arctg\frac{\omega}{\omega_0}}$

Autre représentation que l'on trouve dans la littérature (difficile à exploiter)

Module : $\boxed{\left|\underline{H}(j\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}}$

Argument: $\boxed{\mathrm{Arg}\left(\underline{H}(j\omega)\right) = arctg\frac{\omega_0}{\omega}}$

Réponse en fréquence asymptotique du filtre passe-haut



Asymptotes
- 1/ pour ω << ω_0 $\quad \underline{H}(j\omega) = j\dfrac{\omega}{\omega_0}$
- 2/ pour ω >> ω_0 $\quad \underline{H}(j\omega) = 1$

Cas particulier 3/ pour ω = ω_0 $\quad \underline{H}(j\omega) = \dfrac{j}{1+j}$

$$|\underline{H}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \mathrm{Arg}\left(\underline{H}(j\omega)\right) = 45°$$

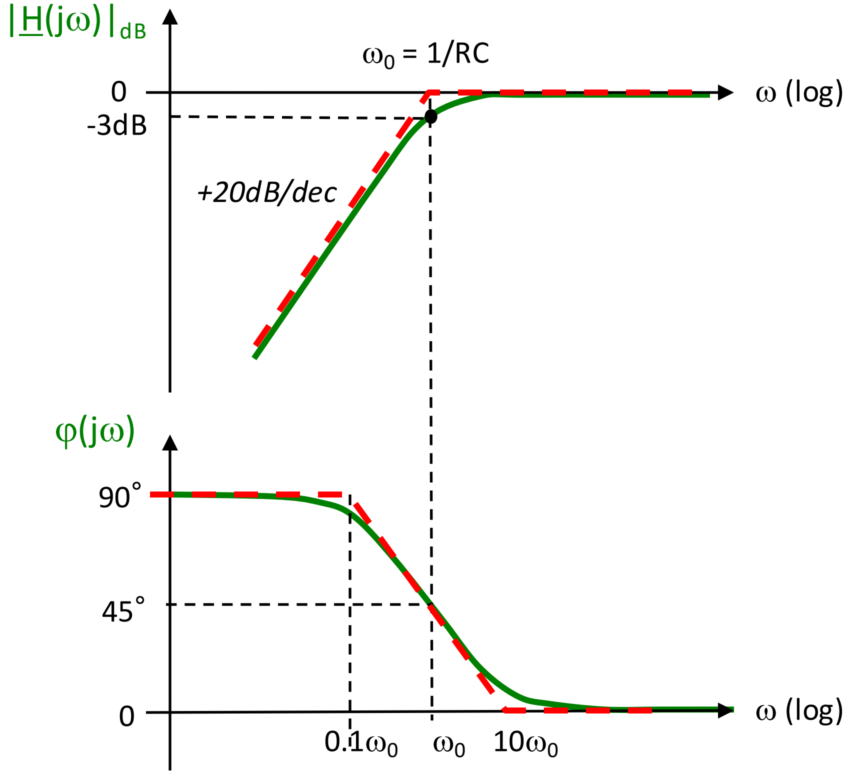


Diagramme de Bode - Module

Propriété : **Le module d'un produit est égal au produit des modules,**

or, le log d'un produit est égal à une somme de log

Si $\underline{H}(j\omega) = \underline{H}_1(j\omega) \cdot \underline{H}_2(j\omega)$ Alors $|\underline{H}(j\omega)|_{dB} = |\underline{H}_1(j\omega)|_{dB} + |\underline{H}_2(j\omega)|_{dB}$

D'où, l'intérêt de mettre une fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$ sous la forme:

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = K.\frac{j\frac{\omega}{\omega_{Z1}}.\left(1+j\frac{\omega}{\omega_{Z2}}\right).\left(1+j\frac{\omega}{\omega_{Z3}}\right)\dots\left(1+j\frac{\omega}{\omega_{Zk}}\right)}{j\frac{\omega}{\omega_{P1}}.\left(1+j\frac{\omega}{\omega_{P2}}\right).\left(1+j\frac{\omega}{\omega_{P3}}\right)\dots\left(1+j\frac{\omega}{\omega_{Pl}}\right)}}$$

Son module exprimé en dB s'exprime comme une somme de modules élémentaires exprimés eux aussi en dB:

$$\left|\underline{H}(j\omega)\right|_{dB} = |K|_{dB} + \left|j\frac{\omega}{\omega_{Z1}}\right|_{dB} + \left|1+j\frac{\omega}{\omega_{Z2}}\right|_{dB} + \cdots + \left|1+j\frac{\omega}{\omega_{Zl}}\right|_{dB} + \left|\frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_{P1}}}\right|_{dB} + \cdots + \left|\frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_{Pl}}}\right|_{dB}$$

<u>BUT : faciliter le tracé du diagramme de Bode</u>

Diagramme de Bode - module de quelques fonctions élémentaires [1]

$H(j\omega) = \mathbf{K} = \text{constante}$

Si $|K| > 1$, alors $|K|_{dB} > 0$

Si $|K| < 1$, alors $|K|_{dB} < 0$

Le **choix de la pulsation est arbitraire** mais doit faciliter la représentation du domaine étudié

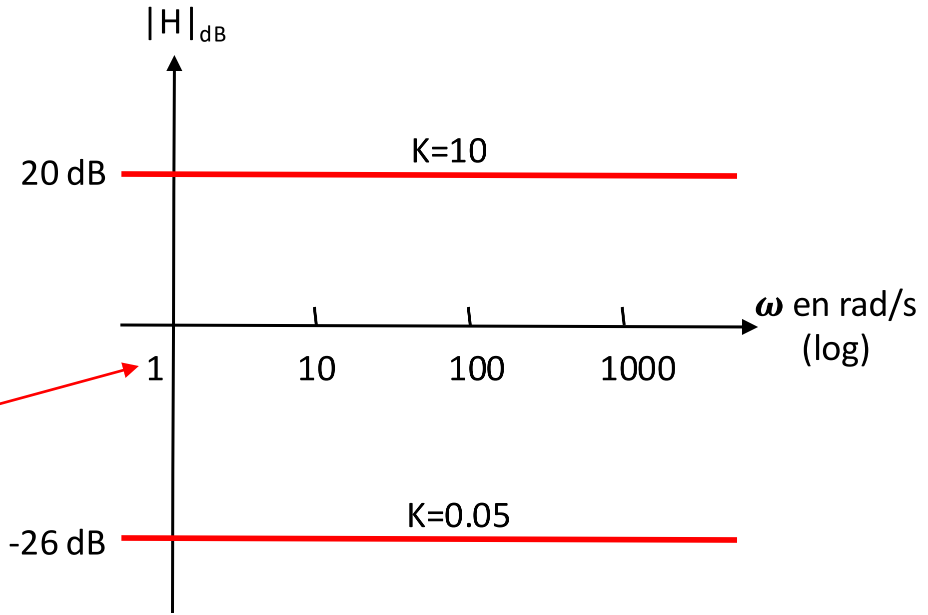


Diagramme de Bode (**module**) de $\underline{H}(j\omega) = K$

Diagramme de Bode - module

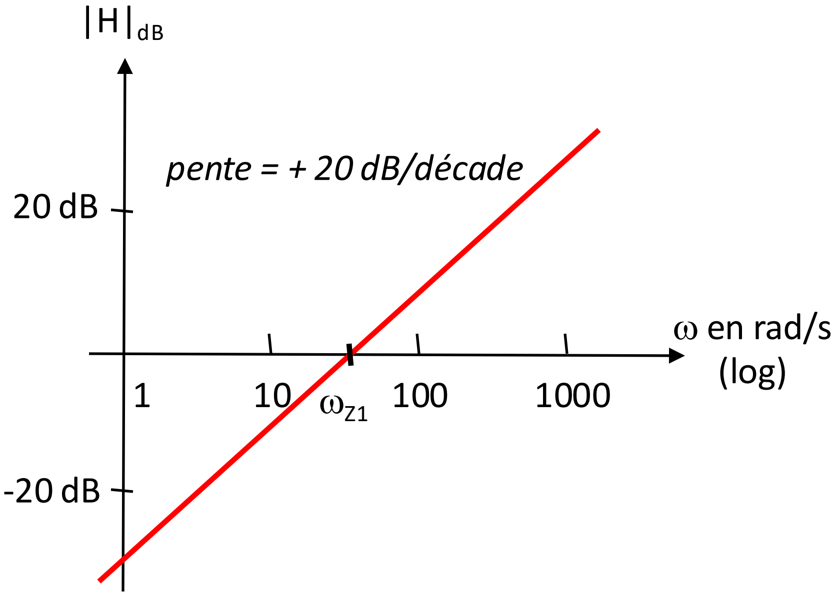
$$\boxed{\left|\underline{H}(j\omega)\right|_{dB} = 20.\log\left|\underline{H}(j\omega)\right|}$$

Exemples de calcul pour quelques constantes:

$\lvert\underline{H}(j\omega)\rvert = 1$	$\lvert\underline{H}(j\omega)\rvert_{dB} = 0$ dB
$\lvert\underline{H}(j\omega)\rvert = 10$	$\lvert\underline{H}(j\omega)\rvert_{dB} = 20$ dB
$\lvert\underline{H}(j\omega)\rvert = 100$	$\lvert\underline{H}(j\omega)\rvert_{dB} = 40$ dB
$\lvert\underline{H}(j\omega)\rvert = 1000$	$\lvert\underline{H}(j\omega)\rvert_{dB} = 60$ dB
$\lvert\underline{H}(j\omega)\rvert = 0.1$	$\lvert\underline{H}(j\omega)\rvert_{dB} = -20$ dB
$\lvert\underline{H}(j\omega)\rvert = 0.01$	$\lvert\underline{H}(j\omega)\rvert_{dB} = -40$ dB
$\lvert\underline{H}(j\omega)\rvert = 0.001$	$\lvert\underline{H}(j\omega)\rvert_{dB} = -60$ dB
$\lvert\underline{H}(j\omega)\rvert = 2$	$\lvert\underline{H}(j\omega)\rvert_{dB} = 6$ dB
$\lvert\underline{H}(j\omega)\rvert = 0.5$	$\lvert\underline{H}(j\omega)\rvert_{dB} = -6$ dB

Diagramme de Bode - module de quelques fonctions élémentaires [2]

$$\underline{H}(j\omega) = j\frac{\omega}{\omega_{Z1}}$$



$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_{P1}}}$$

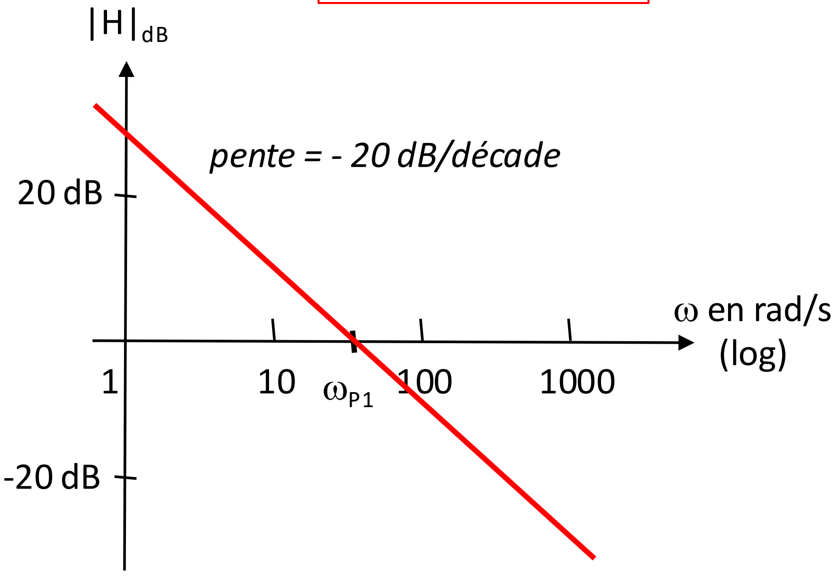
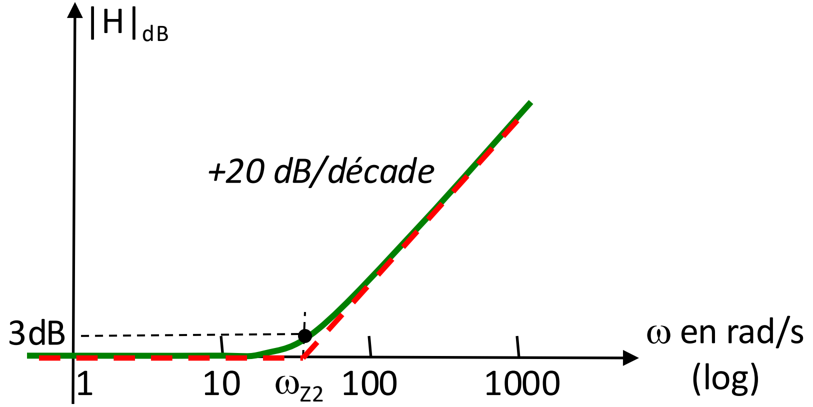


Diagramme de Bode - module
de quelques fonctions élémentaires [3]

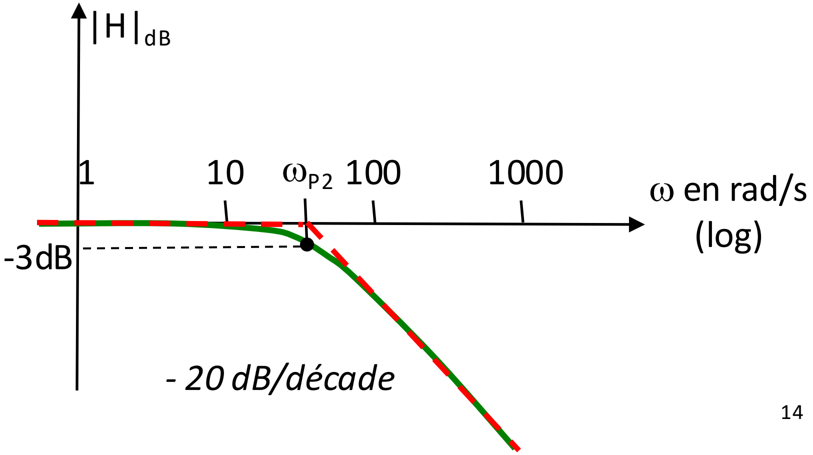
$$\underline{H}(j\omega) = 1 + j\frac{\omega}{\omega_{Z2}} \quad et \left|\underline{H}(j\omega)\right| = \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{Z2}}\right)^2}$$

- Comportement à **basses fréquences** identique à une constante de valeur 1 soit $|H|_{dB} = 0$ dB
- Comportement à **hautes fréquences** identique au terme $j\frac{\omega}{\omega_{Z2}}$ soit $|H|_{dB} = 20$ dB/dec



$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_{P2}}} \quad et \left|\underline{H}(j\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{P2}}\right)^2}}$$

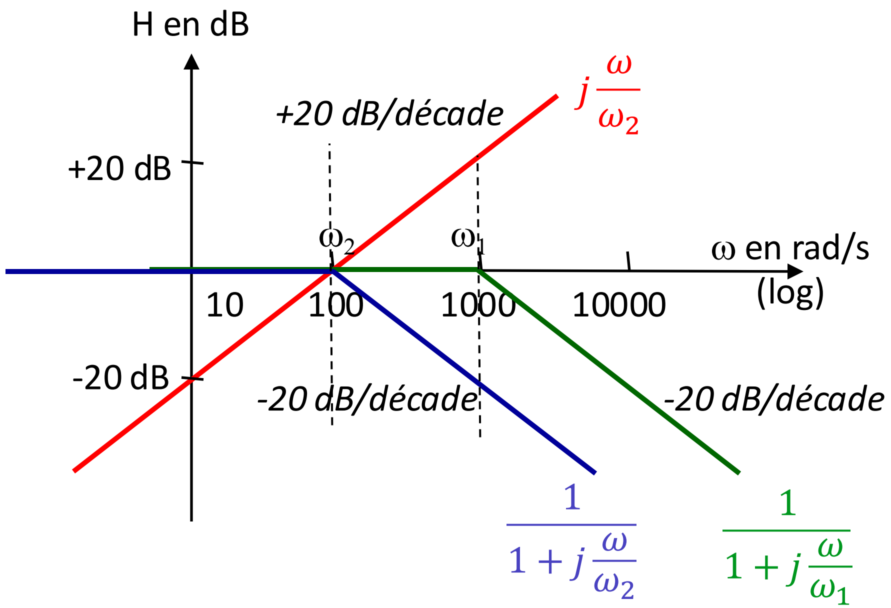
- Comportement à **basses fréquences** identique à une constante de valeur 1 soit $|H|_{dB} = 0$ dB
- Comportement à **hautes fréquences** identique au terme $\frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_{P2}}}$ soit $|H|_{dB} = -20$ dB/dec



Exemple de diagramme de Bode - module

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{j\dfrac{\omega}{\omega_2}}{\left(1 + j\dfrac{\omega}{\omega_1}\right).\left(1 + j\dfrac{\omega}{\omega_2}\right)}$$

Avec $\boldsymbol{\omega_2} = 10^2$ rad/s et $\boldsymbol{\omega_1} = 10^3$ rad/s



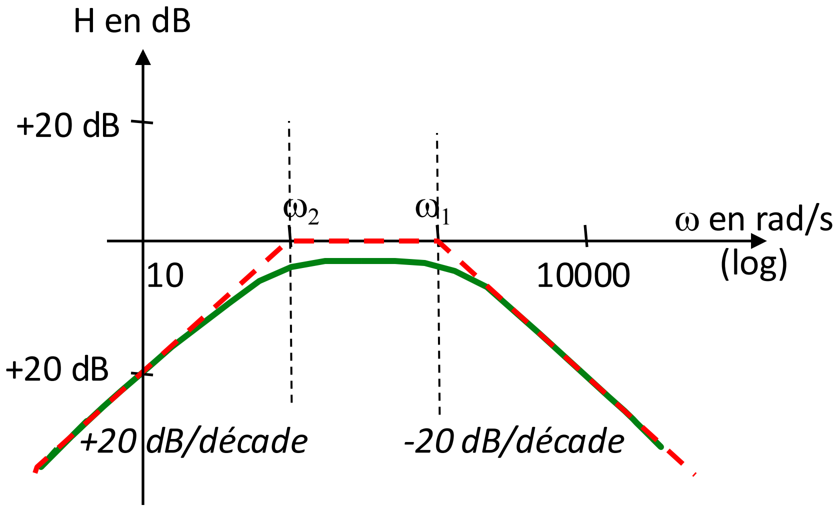


Diagramme de Bode - argument ou phase

La phase Arg($\underline{H}(j\omega)$) est exprimée en radians à 2π près

Propriété : **l'argument d'un produit est égal à la somme des arguments**

Si $\underline{H}(j\omega) = \underline{H}_1(j\omega) \,.\, \underline{H}_2(j\omega)$ alors $Arg(\underline{H}(j\omega)) = Arg(\underline{H}_1(j\omega)) + Arg(\underline{H}_2(j\omega))$

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = K.\frac{j\frac{\omega}{\omega_{Z1}}.\left(1+j\frac{\omega}{\omega_{Z2}}\right).\left(1+j\frac{\omega}{\omega_{Z3}}\right)\ldots\left(1+j\frac{\omega}{\omega_{Zk}}\right)}{j\frac{\omega}{\omega_{P1}}.\left(1+j\frac{\omega}{\omega_{P2}}\right).\left(1+j\frac{\omega}{\omega_{P3}}\right)\ldots\left(1+j\frac{\omega}{\omega_{Pl}}\right)}}$$

Son argument s'exprime comme une somme (différence) d'arguments élémentaires:

$$Arg\left(\underline{H}(j\omega)\right) = Arg(K) + Arg\left(j\frac{\omega}{\omega_{Z1}}\right) + Arg\left(1+j\frac{\omega}{\omega_{Z2}}\right) + \cdots Arg\left(1+j\frac{\omega}{\omega_{Zk}}\right)$$
$$-Arg\left(j\frac{\omega}{\omega_{P1}}\right) - Arg\left(1+j\frac{\omega}{\omega_{P2}}\right)\ldots -Arg\left(1+j\frac{\omega}{\omega_{Pl}}\right)$$

Diagramme de Bode - phase
de quelques fonctions élémentaires [1]

$\underline{H}(j\omega) =$ **K** = constante

Arg(K) = 0 pour K > 0
Arg(K) = π ou 180°
pour K < 0

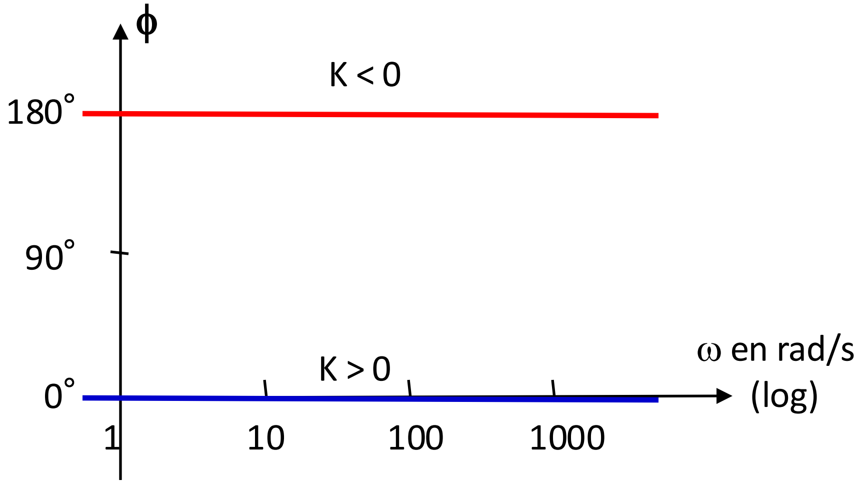
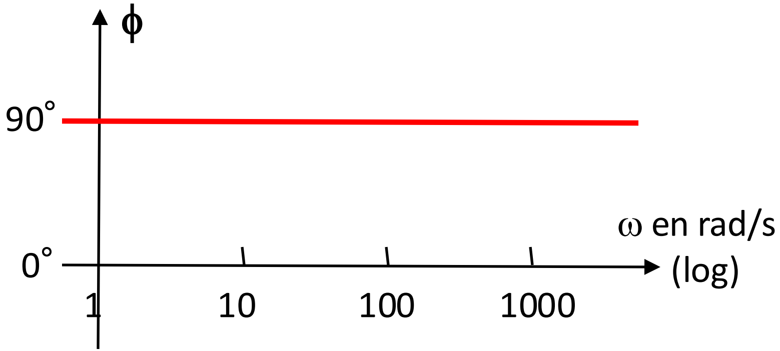


Diagramme de Bode (phase) de $\underline{H}(j\omega) =$ K

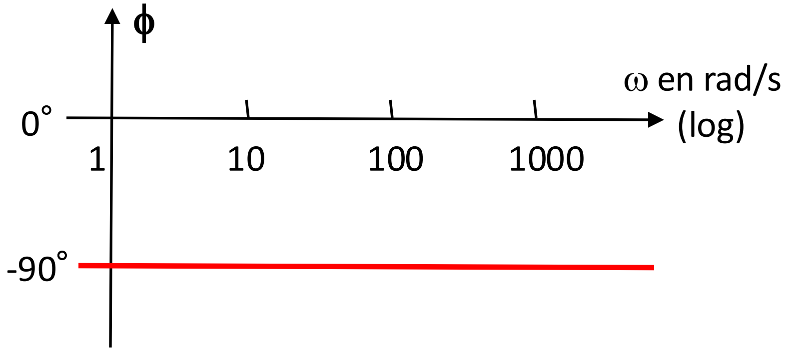
Diagramme de Bode - phase
de quelques fonctions élémentaires [2]

$$\underline{H}(j\omega) = j\frac{\omega}{\omega_{Z1}}$$



Arg($\underline{\text{H}}$(jω)) = π/2 ou 90°

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_{P1}}}$$

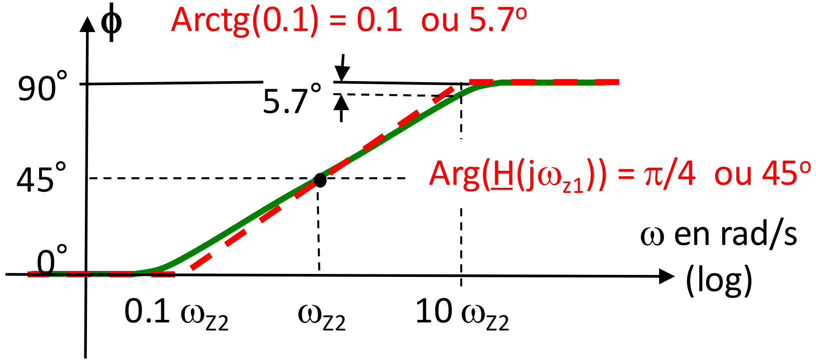


Arg($\underline{\text{H}}$(jω)) = - π/2 ou -90°

Diagramme de Bode - phase
de quelques fonctions élémentaires [3]

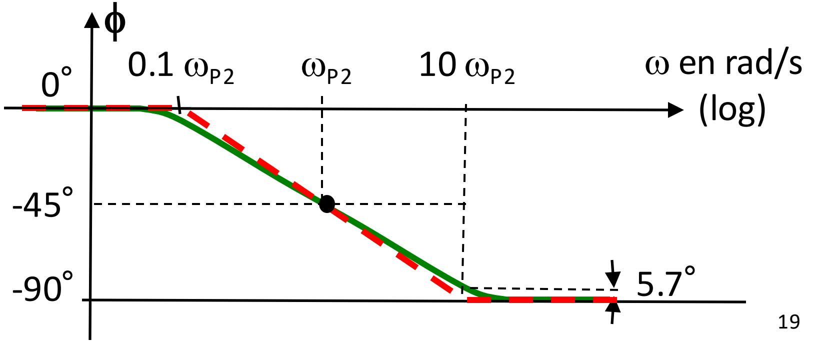
$$\underline{H}(j\omega) = 1 + j\frac{\omega}{\omega_{Z2}}$$

- Comportement à basses fréquences identique à une constante de valeur 1 soit $\phi=0$
- Comportement à hautes fréquences identique au terme $j\frac{\omega}{\omega_{Z2}}$ soit $\phi=\pi/2$



$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_{P2}}}$$

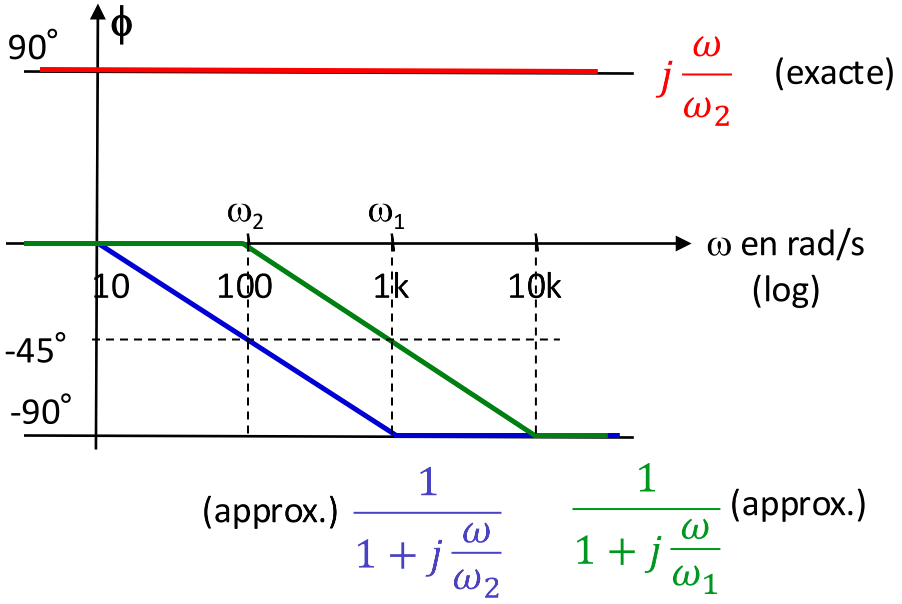
- Comportement à basses fréquences identique à une constante de valeur 1 soit $\phi=0$
- Comportement à hautes fréquences identique au terme $\frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_{P2}}}$ soit $\phi=-\pi/2$

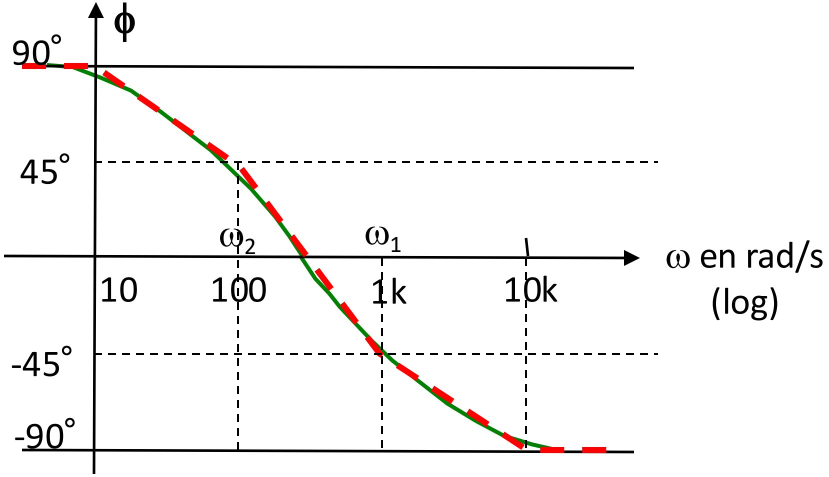


Exemple

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{j\frac{\omega}{\omega_2}}{\left(1+j\frac{\omega}{\omega_1}\right).\left(1+j\frac{\omega}{\omega_2}\right)}$$

Avec $\omega_2 = 10^2$ rad/s et $\omega_1 = 10^3$ rad/s





Exemple de feuille lin - log